

**SÓLO DOS LEYES SENCILLAS PARA CONOCER EL
INTERIOR DE LA TIERRA**

Yoël Lana-Renault

(Colaborador del Dpto. de Física Teórica-Geofísica de la U. de Zaragoza)

El problema de la propagación de las fases sísmicas **P** y **S** en el interior de la Tierra se aborda considerando que la transmisión de las ondas obedecen a la siguiente ley general de velocidad:

$$v(r) = r(B - A \cdot \log r)$$

donde **A** y **B** son constantes a determinar y **r**, la distancia al centro del planeta.

Con la ayuda de esta ley y las suposiciones: Estratificación de la Tierra en capas esféricas, Ley de Snell y Tiempos reales de llegada de las fases **P** y **S** a la superficie terrestre, se consigue determinar el espesor de los estratos: Manto Superior e Inferior, Núcleo Externo, Zona de Transición y Núcleo Interno, así como unas expresiones algebraicas simples para la localización espacial y temporal de cualquier fase (**P**, **S**, **PcP**, **ScS**, **PcS**, **ScP**, **PKP**, **PKiKP**, **PKIKP**) en el interior y superficie de nuestro planeta con una precisión superior al 99 %.

Considerando además, que la densidad en un punto interior de la Tierra obedece a la siguiente ley:

$$\rho(r) = \text{const} \cdot v(r)/r$$

se obtiene una distribución de densidades muy interesante que obliga a plantearnos cuestiones fundamentales sobre la Presión, los materiales existentes y el estado de la materia en el interior de nuestro planeta, dado que el Momento de Inercia total generado por las leyes mencionadas tiene una precisión del 99,4 %.

- .- Y. Lana-Renault, J. Sabadell Melado, R. Cid Palacios y J. Badal Nicolás, 1993. **Modelos de propagación de fases P en el interior de la Tierra: distancias epicentrales, tiempos de propagación y velocidades.** XXIV Bienal de la R.S. Española de Física. Poster.
- .- Y. Lana-Renault y R. Cid Palacios, 1991. **On the Problem of the Internal Constitution of the Earth.** Academia de Ciencias de Zaragoza, Monografía nº 4, pp. 158.

Sesión: **Sismología**

Presentación: **Oral**

Dirección: Yoël Lana-Renault. Departamento de Geofísica. Facultad de Ciencias. Pza. de San Francisco. 50009 - Zaragoza

SÓLO DOS LEYES SENCILLAS
PARA CONOCER
EL INTERIOR DE LA TIERRA

(mediante un modelo didáctico y algebraico)

Autor: Yoël Lana-Renault

(Colaborador del Dpto. de Física Teórica-Geofísica de la U. de Zaragoza)

VIII ASAMBLEA NACIONAL DE GEODESIA Y GEOFÍSICA

Universidad Complutense de Madrid

Instituto Geográfico Nacional

Mayo 1995

Considerando:

- Estratificación de la Tierra en capas esféricas
- Ley de Snell para la refracción de Ondas Sísmicas

y aplicando para la transmisión de las ondas:

- La siguiente ley de velocidad

$$v(r) = r \cdot (B_i - A_i \cdot \log(r))$$

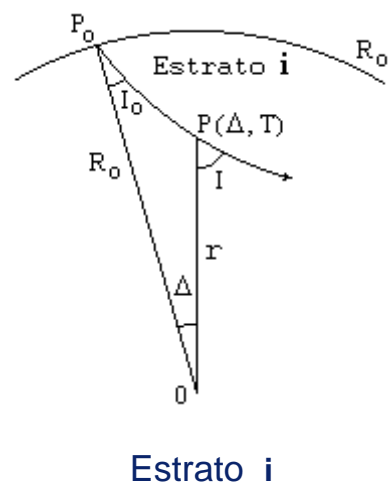
en donde:

- A_i y B_i : constantes de cada estrato i establecido (Manto Superior, Manto Inferior, Núcleo Exterior, etc.)
- r : distancia al centro de la Tierra

Se obtiene las siguientes expresiones algebraicas sencillas para la localización espacial (Δ) y temporal (T) de cualquier punto P de una trayectoria sísmica considerada en un estrato i

$$\Delta(P_o, P) = \frac{\cos(I_o) - \cos(I)}{A_i \cdot P_o}$$

$$T(P_o, P) = \frac{1}{A_i} \cdot \log \left[\frac{\tan\left(\frac{I}{2}\right)}{\tan\left(\frac{I_o}{2}\right)} \right]$$



donde:

$$P_o = \frac{\text{sen}(I_o)}{k_o} = \frac{\text{sen}(I)}{k(r)}$$

es una constante de la trayectoria sísmica

siendo: $k(r) = B_i - A_i \cdot \log(r)$ y $k_o = k(R_o)$

UTILIZANDO distintas ESTRATEGIAS para conocer las constantes A_i y B_i de cada estrato i tales como:

- Ausencia de la fase **P** a partir de $\Delta = 102^\circ - 103^\circ$

- Recorrido de la fase **PKP**:

Inicio en $\Delta = 180^\circ - 188^\circ$

Retroceso hasta $\Delta = 144^\circ - 143^\circ$ (Punto cáustico **B**, máx. Energía)

Avance hasta $\Delta = 169^\circ - 170^\circ$

- Recorrido de la fase **PKIKP**:

Inicio en $\Delta > 110^\circ$ (según autores)

Fin en $\Delta = 180^\circ$ (Rayo axial)

Punto singular **E** en $\Delta = 146^\circ$

- Puntos singulares de **Choy-Cormier**

D-cusp $\Delta = 122^\circ$

C-cusp $\Delta = 152^\circ$

RESUMIENDO: Atendiendo a las distintas interpretaciones de

JEFFREYS

GUTENBERG

BOLT

Miss **LEHMANN**

CHOY-CORMIER

QAMAR

y otros autores

Se han construido:

.- cinco modelos de TIERRA

en donde:

los tiempos teóricos de llegada

de las FASES P, S, PcS, PKP, PKiKP, PKIKP, etc.

son sorprendentemente

casi iguales a los registrados

(**ERRORES** de 1 segundo)

Los cinco modelos están basados en cinco estratos:

Manto Superior , $i = 0$		los 4 cumplen la ley de velocidad
Manto Inferior , $i = 1$		
Núcleo Exterior , $i = 2$		
Zona de Transición , $i = 3$		
Núcleo Interior , $i = c$	-----	velocidad v_c constante para evitar la singularidad en $r = 0$

cuyos radios exteriores R_i e inicio en profundidad z_i son:

$R_0 = 6371$ km	$z_0 = 0$ km
$R_1 = 5525$ km	$z_1 = 846$ km
$R_2 = 3478$ km	$z_2 = 2893$ km
$R_3 = 1428$ km	$z_3 = 4943$ km

Diferencias entre los modelos:

Tamaño " Radio R_c " del **Núcleo Interior**

Velocidad v_c

Recorrido de las FASES:

En todos los modelos, las Fases **P**, **S**, **PcP**, **PcS**, **ScP**, **ScS**, **PKP** y **PKiKP(t)** tienen el mismo recorrido

Fases **P** y **PcP**: Inicio en $\Delta = 0^\circ$
Final en $\Delta = 102^\circ$ (Rayo tangente al **Núcleo Exterior**)

Fases **S** y **ScS**: Inicio en $\Delta = 0^\circ$
Final en $\Delta = 106^\circ$ (Rayo tangente al **Núcleo Exterior**)

Fases **PcS** y **ScP**: Inicio en $\Delta = 0^\circ$
Final en $\Delta = 65^\circ$ (Rayo tangente al **Núcleo Exterior**)

Fase **PKP**:

Inicio en $\Delta = 174^\circ$ (Rayo tangente al **N. E.**, refracción con ángulo crítico)

Retroceso hasta $\Delta = 144^\circ$ (Punto cáustico **B** de **Qamar**, máx. Energía)

Avance hasta $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

Fase **PKiKP(t)**: Fase **PKP** reflejada en la **Zona de Transición**

Inicio en $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

Retroceso hasta $\Delta = 0^\circ$

MODELO 1

Características diferenciadoras:

$$R_c = 1175 \text{ km}$$

$$z_c = 5196 \text{ km}$$

$$v_c = 11,3231 \text{ km/seg}$$

$$\text{velocidad en } R'_3 = R_c \text{ (en Zona de Transición): } v'_3 = 11,7289 \text{ km/seg}$$

FIGURA (lado Izdo.): Retroceso de la Fase **PKIP** y reflexiones

Inicio en $\Delta = 152^\circ$ (**C-cusp** de **Choy-Cormier**)

(Rayo tangente al **N. I.**, refracción con ángulo crítico)

Retroceso hasta $\Delta = 146^\circ$ (Punto singular **E**, máxima Energía)

FIGURA (lado Dcho.):

Fase **PKP(t)**: Fase **PKP** que penetra en la Zona de Transición

Inicio en $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

Retroceso hasta $\Delta = 122^\circ$ (**D-cusp** de **Choy-Cormier**)

(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Fase **PKiKP**:

Inicio en $\Delta = 122^\circ$ (**D-cusp** de **Choy-Cormier**)

(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Retroceso hasta $\Delta = 0^\circ$

Fase **PKIKP**:

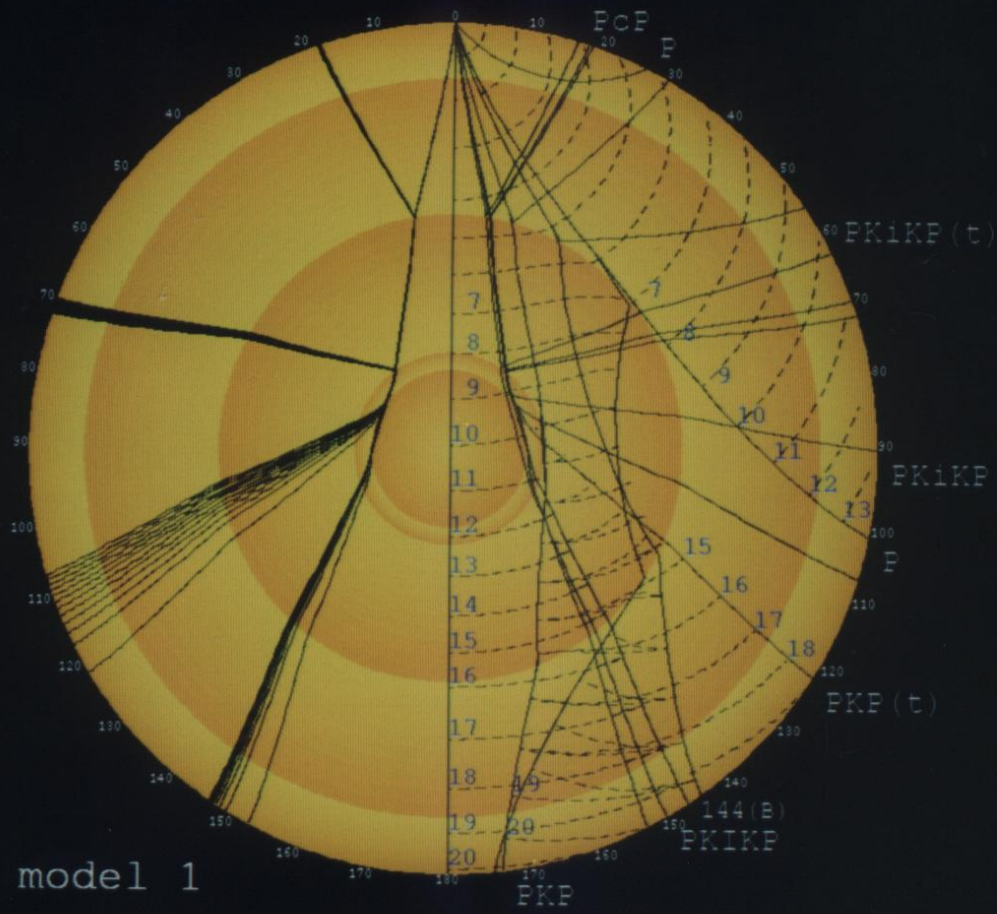
Inicio en $\Delta = 152^\circ$ (**C-cusp** de **Choy-Cormier**)

(Rayo tangente al **N. I.**, refracción con ángulo crítico)

Retroceso hasta $\Delta = 146^\circ$ (Punto singular **E**, máxima Energía)

Avance hasta $\Delta = 180^\circ$ (Rayo Axial)

P-PHASES IN THE EARTH'S INTERIOR



MODELO 5

Características diferenciadoras:

$$R_c = 1196 \text{ km}$$

$$z_c = 5175 \text{ km}$$

$$v_c = 11,3289 \text{ km/seg}$$

$$\text{velocidad en } R'_3 = R_c \text{ (en Zona de Transición): } v'_3 = 11,5784 \text{ km/seg}$$

FIGURA (lado Izdo.): Retroceso de la Fase **PKP(t)** y reflexiones

Inicio en $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

Retroceso hasta $\Delta = 122,2^\circ$ (**D-cusp de Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

FIGURA (lado Dcho.):

Fase **PKP(t)**: Fase **PKP** que penetra en la Zona de Transición

Inicio en $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

Retroceso hasta $\Delta = 122,2^\circ$ (**D-cusp de Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Fase **PKiKP**:

Inicio en $\Delta = 122,2^\circ$ (**D-cusp de Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Retroceso hasta $\Delta = 0^\circ$

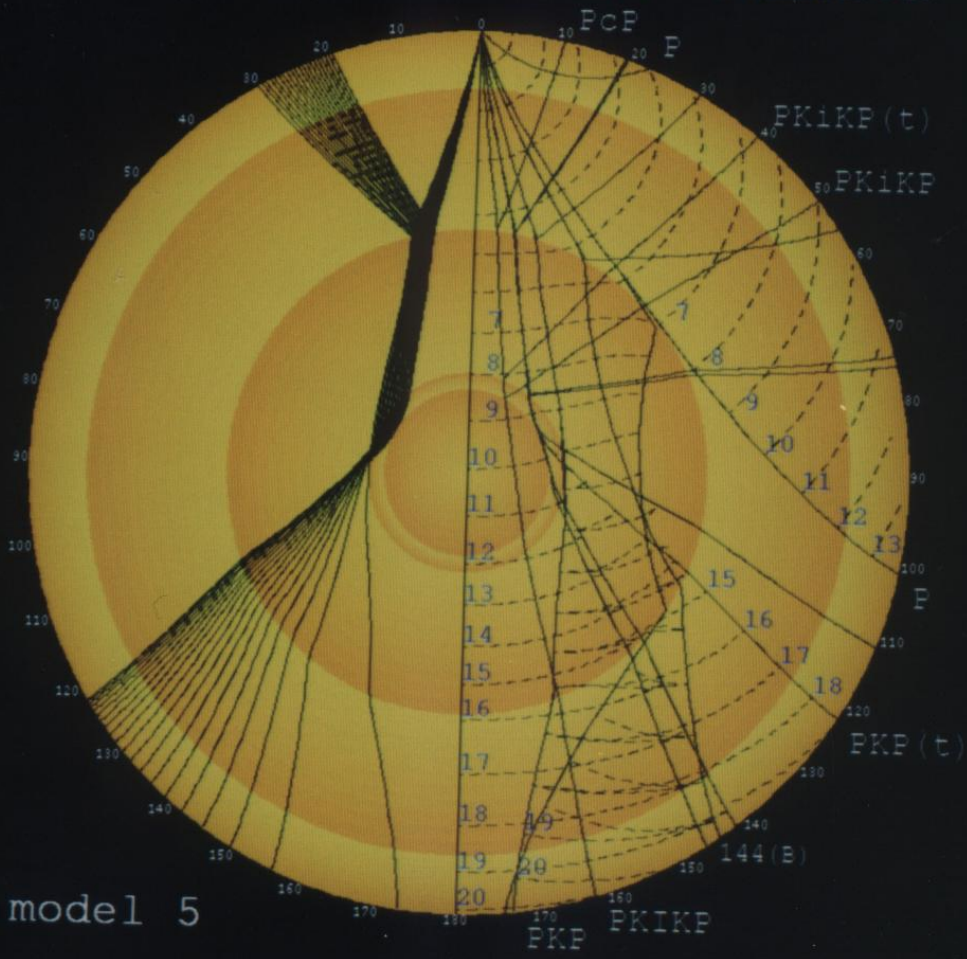
Fase **PKIKP**:

Inicio en $\Delta = 146^\circ$ (Punto singular **E**)
(Rayo tangente al **N. I.**, refracción con ángulo crítico)

Retroceso hasta $\Delta = 141^\circ$ (Punto máxima Energía)

Avance hasta $\Delta = 180^\circ$ (Rayo Axial)

P-PHASES IN THE EARTH'S INTERIOR



MODELO 2

Características diferenciadoras:

$$R_c = 1216 \text{ km}$$

$$z_c = 5155 \text{ km}$$

$$v_c = 11,3317 \text{ km/seg}$$

$$\text{velocidad en } R'_3 = R_c \text{ (en Zona de Transición): } v'_3 = 11,4352 \text{ km/seg}$$

FIGURA (lado Izdo.): Retroceso de la Fase **PKP** y reflexiones Fase **P**

Inicio en $\Delta = 174^\circ$ (Rayo tangente al **N. E.**, refracción con ángulo crítico)

Retroceso hasta $\Delta = 144^\circ$ (Punto cáustico **B** de **Qamar**, máxima Energía)

FIGURA (lado Dcho.):

Fase **PKP(t)**: Fase **PKP** que penetra en la Zona de Transición

Inicio en $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

Retroceso hasta $\Delta = 122,5^\circ$ (**D-cusp** de **Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Fase **PKiKP**:

Inicio en $\Delta = 122,5^\circ$ (**D-cusp** de **Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Retroceso hasta $\Delta = 0^\circ$

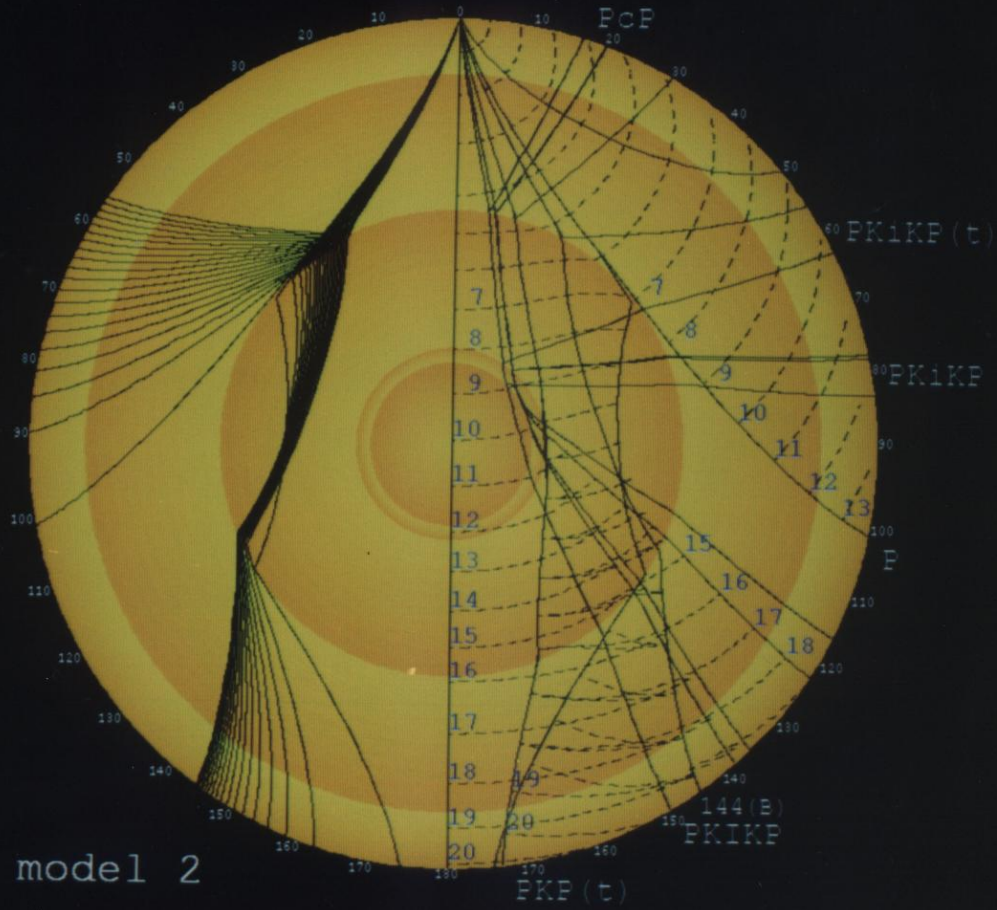
Fase **PKIKP**:

Inicio en $\Delta = 138^\circ$ (Rayo tangente al **N. I.**, refracción con ángulo crítico)

Retroceso hasta $\Delta = 135^\circ$ (Punto máxima Energía)

Avance hasta $\Delta = 180^\circ$ (Rayo Axial)

P-PHASES IN THE EARTH'S INTERIOR



MODELO 3

Características diferenciadoras:

$$R_c = 1230 \text{ km}$$

$$z_c = 5141 \text{ km}$$

$$v_c = 11,3323 \text{ km/seg}$$

$$\text{velocidad en } R'_3 = R_c \text{ (en Zona de Transición): } v'_3 = v_c$$

FIGURA (lado Izdo.): Avance de la Fase **PKP** y reflexiones

Inicio en $\Delta = 144^\circ$ (Punto cáustico **B** de **Qamar**, máxima Energía)

Avance hasta $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

FIGURA (lado Dcho.):

Fase **PKP(t)**: Fase **PKP** que penetra en la Zona de Transición

Inicio en $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la **Zona de Transición**)

Retroceso hasta $\Delta = 122,9^\circ$ (**D-cusp** de **Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Fase **PKiKP**:

Inicio en $\Delta = 122,9^\circ$ (**D-cusp** de **Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

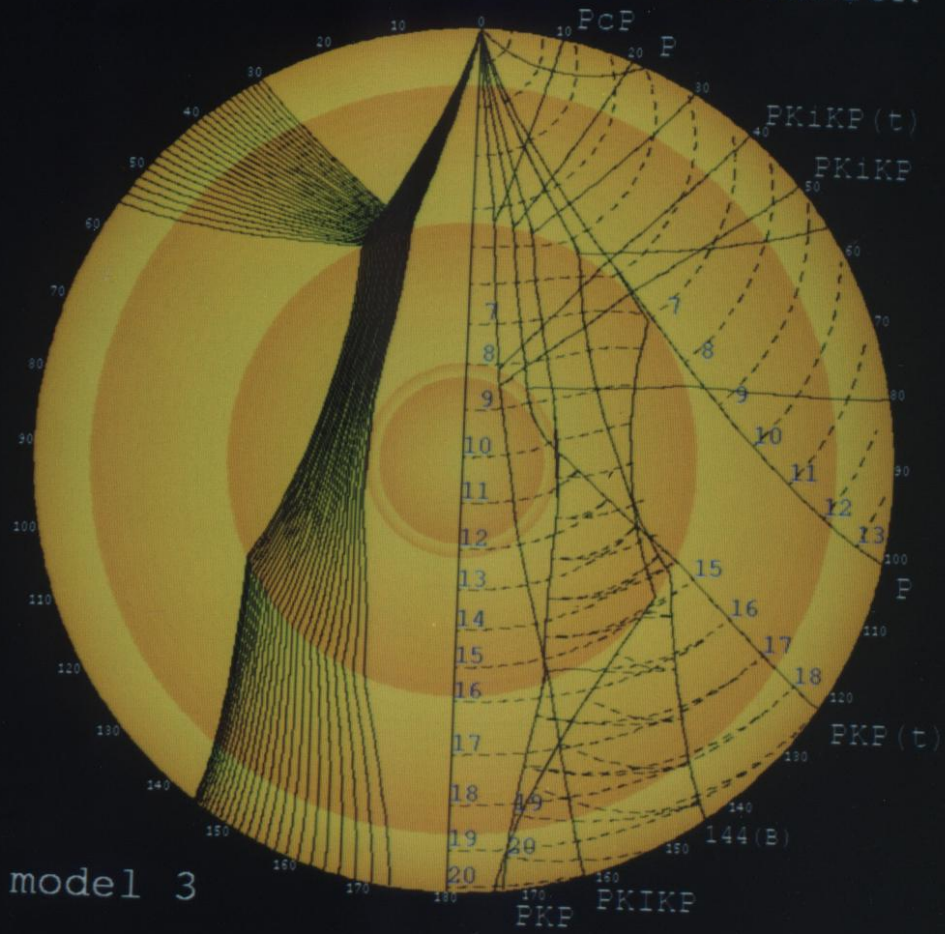
Retroceso hasta $\Delta = 0^\circ$

Fase **PKIKP**:

Inicio en $\Delta = 122,9^\circ$ (**D-cusp** de **Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Avance hasta $\Delta = 180^\circ$ (Rayo Axial)

P-PHASES IN THE EARTH'S INTERIOR



model 3

PKP PKiKP

MODELO 4

Características diferenciadoras:

$$R_c = 1267 \text{ km}$$

$$z_c = 5104 \text{ km}$$

$$v_c = 11,3281 \text{ km/seg}$$

$$\text{velocidad en } R'_3 = R_c \text{ (en Zona de Transición): } v'_3 = 11,0421 \text{ km/seg}$$

FIGURA (lado Izdo.): Pincel de rayos de la Fase **PKiKP** y reflexiones

Inicio en $\Delta = 110^\circ$ (**Gutenberg**, Inicio refracción con ángulo crítico)

Avance sólo hasta $\Delta = 124,4^\circ$ (coincide con el fin de la fase **PKP(t)**
e inicio de la fase **PKiKP**)

FIGURA (lado Dcho.):

Fase **PKP(t)**: Fase **PKP** que penetra en la Zona de Transición

Inicio en $\Delta = 172^\circ$ (Rayo tangente a la Zona de Transición)

Retroceso hasta $\Delta = 124,4^\circ$ (cercano a **D-cusp** de **Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

Fase **PKiKP**:

Inicio en $\Delta = 124,4^\circ$ (cercano a **D-cusp** de **Choy-Cormier**)
(Rayo tangente al **Núcleo Interior**)

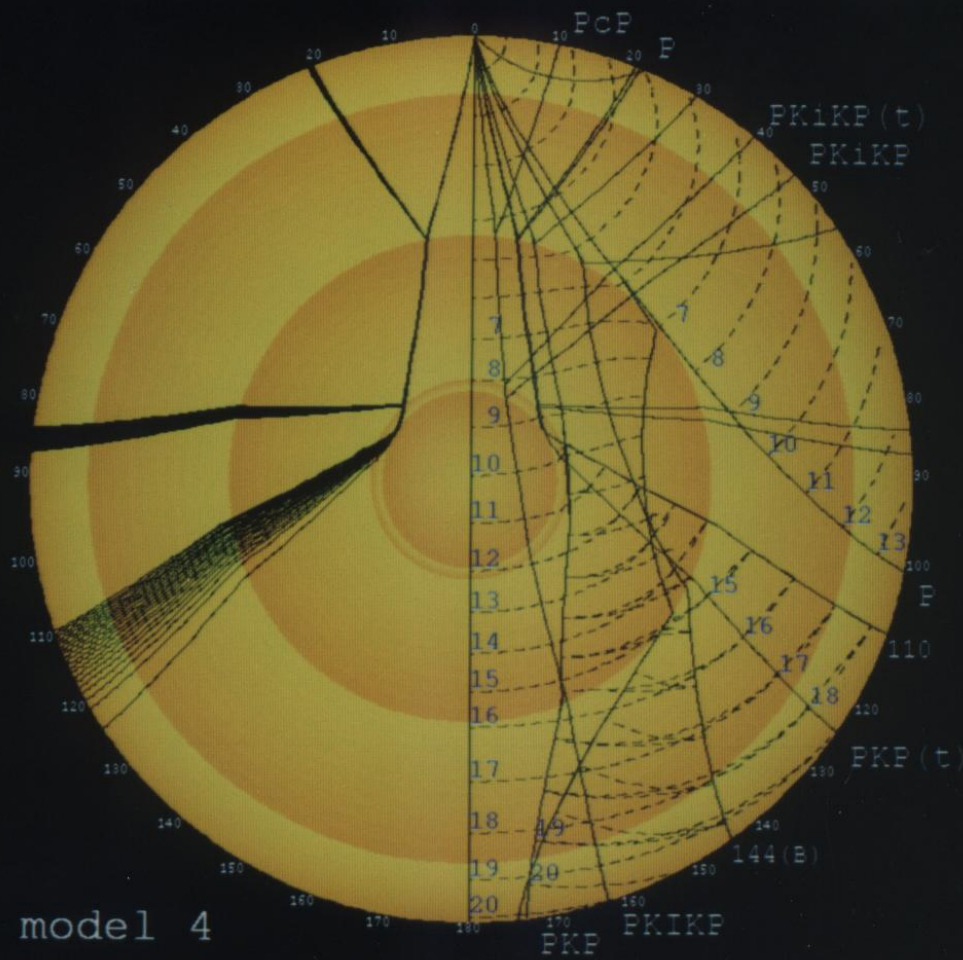
Retroceso hasta $\Delta = 0^\circ$

Fase **PKiKP**:

Inicio en $\Delta = 110^\circ$ (**Gutenberg**, Inicio refracción con ángulo crítico)

Avance hasta $\Delta = 180^\circ$ (Rayo Axial)

P-PHASES IN THE EARTH'S INTERIOR



Considerando ahora:

.- La siguiente ley de densidades $\rho(r)$ para un estrato i

$$\rho(r) = \rho_o + a_i \cdot \log\left(\frac{R_o}{r}\right)$$

en donde:

$\rho_o = \rho(R_o)$: densidad superficial de cada estrato i

a_i : constante específica de cada estrato i

r : distancia al centro de la Tierra

se obtiene la siguiente relación con la velocidad $v(r)$

$$\rho(r) = H \cdot \frac{v(r)}{r} \quad \text{ó} \quad v(r) = \frac{r \cdot \rho(r)}{H}$$

siendo H una constante general de la Tierra que podemos calcular fácilmente.

En el Núcleo Interior, la densidad ρ_c será constante al serlo la velocidad v_c , y su valor es:

$$\rho_c = H \cdot \frac{v_c}{R_c}$$

Desarrollando estas leyes, se obtienen expresiones muy sencillas para el cálculo de las funciones:

POTENCIAL

GRAVEDAD

PRESIÓN

MOMENTO de INERCIA

Variación de la PRESIÓN con la DENSIDAD

Dichas funciones dependen de términos tales como:

$$\text{Potencial Interior} = \text{funcion} \left[2 \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\rho + \frac{a_i}{2} \right) \cdot r^2 \right]$$

$$\text{Potencial Exterior} = \text{funcion} \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\rho + \frac{a_i}{3} \right) \cdot r^2 \right]$$

$$\text{Gravedad} = \text{funcion} \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\rho + \frac{a_i}{3} \right) \cdot r \right]$$

$$\text{Presión} = \text{funcion} \left[\left(\rho - a_i \right) \cdot g \cdot r - 2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho^2 \cdot r^2 \right]$$

$$\text{Momento de Inercia} = \text{funcion} \left[\frac{8}{15} \cdot \pi \cdot \left(\rho_i + \frac{a_i}{5} \right) \cdot R_i^5 \right]$$

Variación de la Presión con la densidad:

$$\Delta P_{\rho} = \frac{\rho \cdot g \cdot r}{a_i} \quad \text{ó} \quad \Delta P_{\rho} = \frac{g \cdot v}{A_i}$$

Planeta TIERRA. Modelo 1

Masa: $M := 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Radio medio: $R_0 := 6371028 \text{ m}$

Densidad media: $\Delta := \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_0^3} \quad \Delta = 5.51780191 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Radios superior e inferior, y constantes de cada estrato:

Manto Superior. Estrato E_0

$$\begin{aligned} R_0 &:= 6371.028 \text{ km} & A_0 &:= 5.91557395629 \cdot 10^{-3} \text{ seg}^{-1} \\ R'_0 &:= 5525.20361026 \text{ km} & B_0 &:= 5.29785911433 \cdot 10^{-2} \text{ seg}^{-1} \end{aligned}$$

Manto Inferior. Estrato E_1

$$\begin{aligned} R_1 &:= R'_0 \text{ km} & A_1 &:= 4.01993327787 \cdot 10^{-3} \text{ seg}^{-1} \\ R'_1 &:= 3477.76192858 \text{ km} & B_1 &:= 3.66437125273 \cdot 10^{-2} \text{ seg}^{-1} \end{aligned}$$

Núcleo Exterior. Estrato E_2

$$\begin{aligned} R_2 &:= R'_1 \text{ km} & A_2 &:= 5.10688201126 \cdot 10^{-3} \text{ seg}^{-1} \\ R'_2 &:= 1428.12773922 \text{ km} & B_2 &:= 4.37931737692 \cdot 10^{-2} \text{ seg}^{-1} \end{aligned}$$

Zona de Transición. Estrato E_3

$$\begin{aligned} R_3 &:= R'_2 \text{ km} & A_3 &:= 1.68397895213 \cdot 10^{-2} \text{ seg}^{-1} \\ R'_3 &:= 1174.91960427 \text{ km} & B_3 &:= 1.29022417085 \cdot 10^{-1} \text{ seg}^{-1} \end{aligned}$$

Núcleo Interior. Estrato E_c

$$R_c := R'_3 \text{ km} \quad k_c := 9.63736092798 \cdot 10^{-3} \text{ seg}^{-1}$$

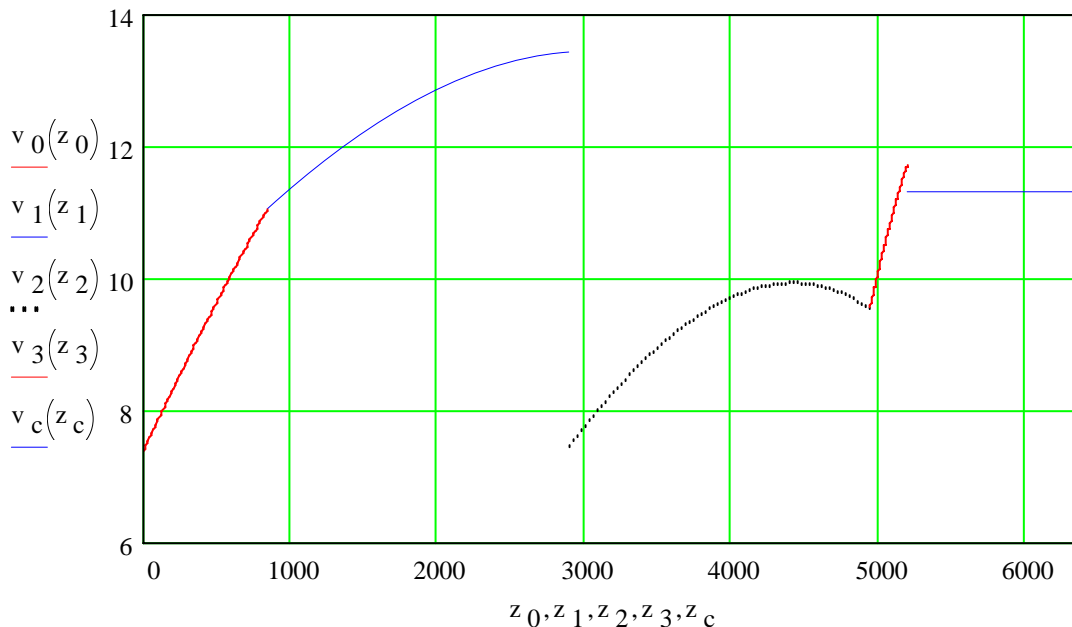
Nota 1: En todos los cálculos, las distancias deben ponerse en "km", ya que las constantes A_j , B_j , y k_j fueron calculadas en su día en función de estas unidades.

Representación gráfica de la VELOCIDAD de propagación de las ONDAS P en el interior de la TIERRA. Modelo: MOD = 1

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Eje OX: profundidad z en km.

Eje OY: velocidad v(z) en km/seg



En los estratos $i = 0,1,2,3$ la velocidad es:

$$v_i(r) = r \cdot k_i(r) \quad \text{siendo:} \quad k_i(r) = B_i - A_i \cdot \ln(r) \quad \text{para} \quad R_i \geq r \geq R'_i$$

que en función de la densidad $\rho(r)$ toma la forma:

$$v_i(r) = \frac{r \cdot \rho_i(r)}{H} \quad \text{siendo:} \quad \rho_i(r) = \rho_i + a_i \cdot \ln\left(\frac{R_i}{r}\right) \quad \text{con} \quad \rho_i = \rho_i(R_i) \quad \text{y} \quad a_i = H \cdot A_i$$

En el Núcleo Interior hemos considerado la velocidad constante

$$v_c = R_c \cdot k_c \quad \text{con} \quad k_c = 0.00963736 \text{ seg}^{-1} \quad R'_3 = R_c \geq r \geq 0$$

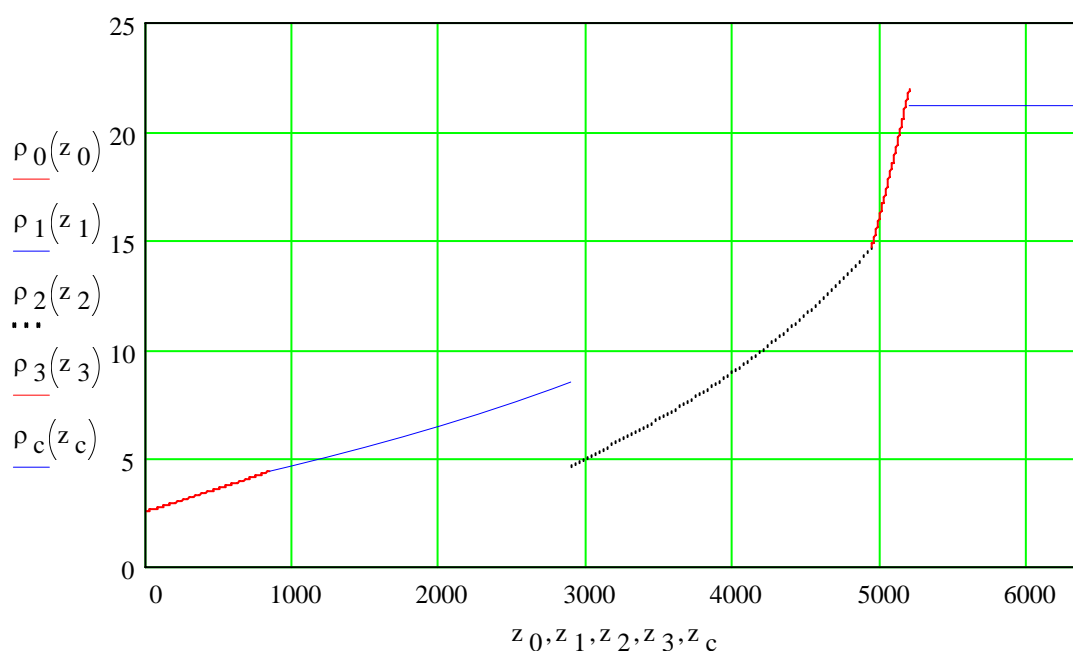
Representación gráfica de la DENSIDAD en el interior de la TIERRA

según el modelo: MOD = 1 de propagación de ondas sísmicas P

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^3 \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3} \cdot \text{seg}$

Eje OX: profundidad z en km.

Eje OY: densidad $\rho(z)$ en gm/cm³



En los estratos $i = 0,1,2,3$ la densidad es:

$$\rho_i(r) = \rho_i + a_i \cdot \ln\left(\frac{R_i}{r}\right) \quad \text{con} \quad \rho_i = \rho_i(R_i) \quad a_i = H \cdot A_i \quad R_i \geq r \geq R'_i$$

que en función de la velocidad de transmisión de las ondas P toma la forma:

$$\rho_i(r) = H \cdot \frac{v_i(r)}{r} \quad \text{con} \quad v_i(r) = r \cdot (B_i - A_i \cdot \ln(r))$$

y si hacemos $k_i(r) = B_i - A_i \cdot \ln(r)$ obtenemos la expresión $\rho_i(r) = H \cdot k_i(r)$

En el Núcleo Interior hemos considerado la densidad constante

$$\rho_c = H \cdot k_c \quad \text{con} \quad k_c = 0.00963736 \quad \text{seg}^{-1} \quad R'_3 = R_c \geq r \geq 0$$

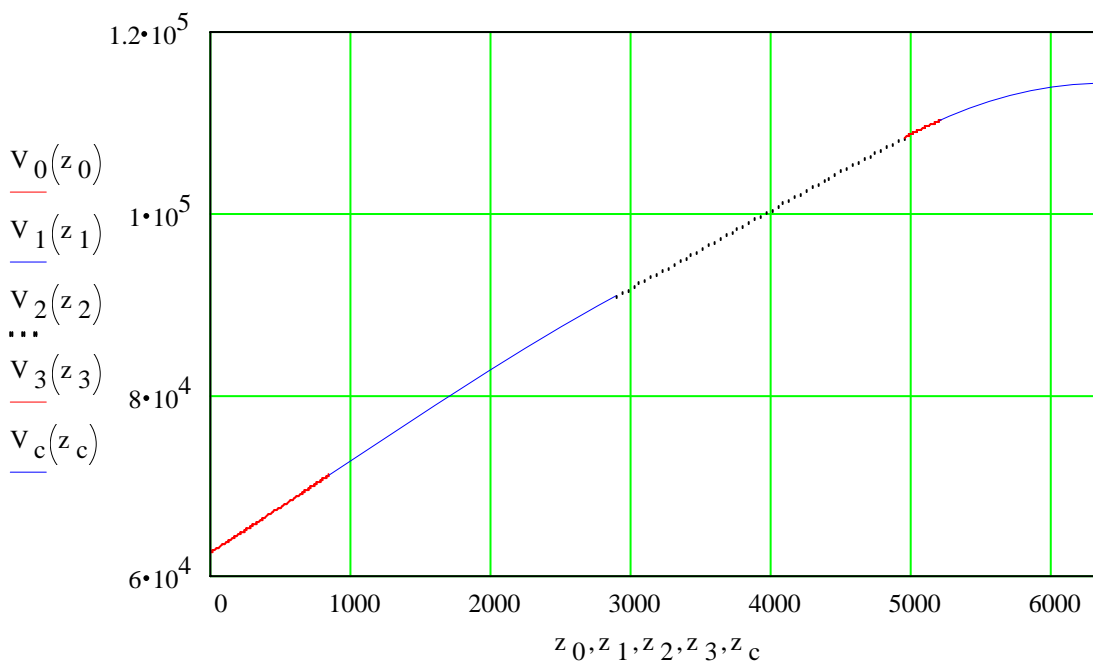
Representación gráfica del POTENCIAL en el interior de la TIERRA

según el modelo: MOD = 1 de propagación de ondas sísmicas P

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Eje OX: profundidad z en km.

Eje OY: Potencial V(z) en N·km/kg



Potencial Interior (constante) generado por una capa de espesor (R_i, r) de un estrato E_i :

$$V_i(r) = 2 \cdot \pi \cdot G \cdot H \cdot \left[R_i^2 \cdot \left(k_i(R_i) + \frac{A_i}{2} \right) - r^2 \cdot \left(k_i(r) + \frac{A_i}{2} \right) \right]$$

Potencial Exterior (en la superficie) generado por una capa de espesor (r, R'_i) de un estrato E_i :

$$V_i(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{G \cdot H}{r} \cdot \left[r^3 \cdot \left(k_i(r) + \frac{A_i}{3} \right) - R_i'^3 \cdot \left(k_i(R'_i) + \frac{A_i}{3} \right) \right]$$

con $k_i(r) = B_i - A_i \cdot \ln(r)$

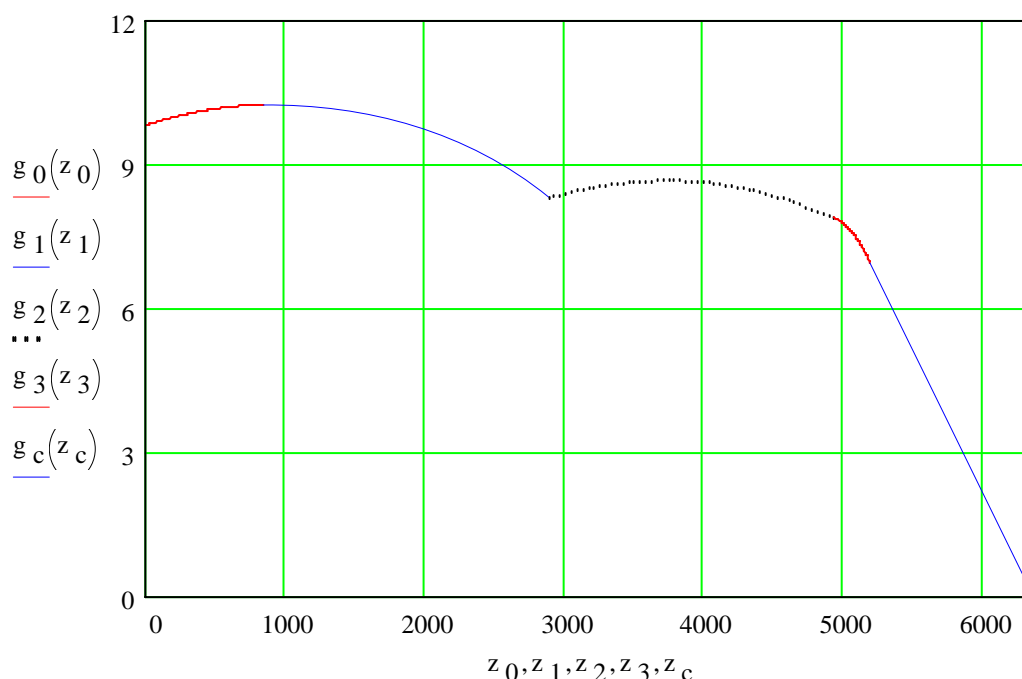
Representación gráfica de la GRAVEDAD en el interior de la TIERRA

según el modelo: MOD = 1 de propagación de ondas sísmicas P

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Eje OX: profundidad z en km.

Eje OY: Gravedad g(z) en m/seg²



Gravedad $g_i(r)$ en un estrato E_i :

$$g_i(r) = \frac{G}{r^2} \cdot \left(m_i(r, R'_i) + \sum_j m_j + m_c \right) \quad j=i+1..3$$

siendo:

$$m_i(r, R'_i) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot H \cdot \left[r^3 \cdot \left(k_i(r) + \frac{A_i}{3} \right) - R'^i_3 \cdot \left(k_i(R'_i) + \frac{A_i}{3} \right) \right] \quad k_i(r) = B_i - A_i \cdot \ln(r)$$

Gravedad $g_c(r)$ en el Núcleo Interior - E_c :

$$g_c(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_c \cdot r \quad \rho_c = H \cdot k_c$$

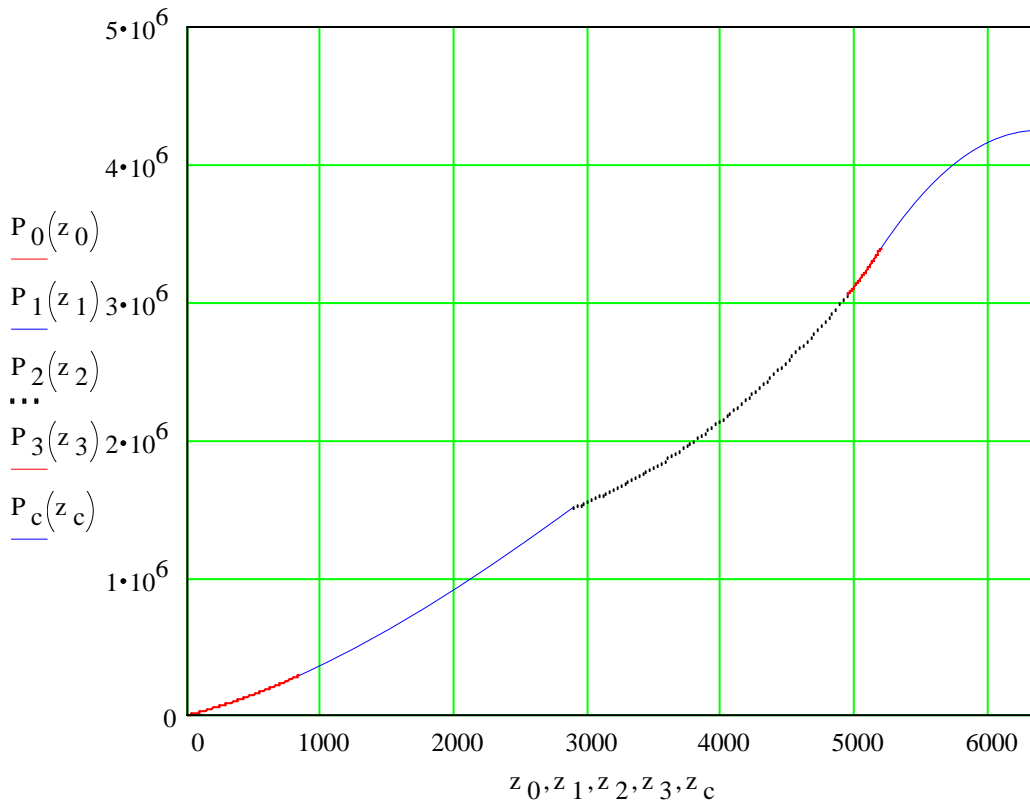
Representación gráfica de la PRESIÓN en el interior de la TIERRA

considerando que no hay ninguna discontinuidad,
y de acuerdo con los resultados del modelo: MOD = 1
de propagación de ondas sísmicas P.

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Eje OX: profundidad z en km.

Eje OY: Presión P(z) en Atmosferas



Presión $P_i(r)$ en el interior de un estrato E_i :

$$P_i(r) = P_i(R_i) + P_{i1}(r) + P_{i2}(r) - P_{i3}(r)$$

$$P_i(R_i) = \text{Presión en el inicio del estrato}$$

$$P_{i1}(r) = 2 \cdot \pi \cdot G \cdot (\rho_i(R_i)^2 \cdot R_i^2 - \rho_i(r)^2 \cdot r^2)$$

$$P_{i2}(r) = A_i \cdot H \cdot (g_i(R_i) \cdot R_i - g_i(r) \cdot r)$$

$$P_{i3}(r) = \rho_i(R_i) \cdot g_i(R_i) \cdot R_i - \rho_i(r) \cdot g_i(r) \cdot r$$

Continuidad: $P_i(R'_i) = P_j(R_j)$ $j = i + 1$ **y** $R'_i = R_j$

Presión $P_c(r)$ en el Núcleo Interior - E_c : $P_c(r) = P_c(R_c) + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_c^2 \cdot (R_c^2 - r^2)$

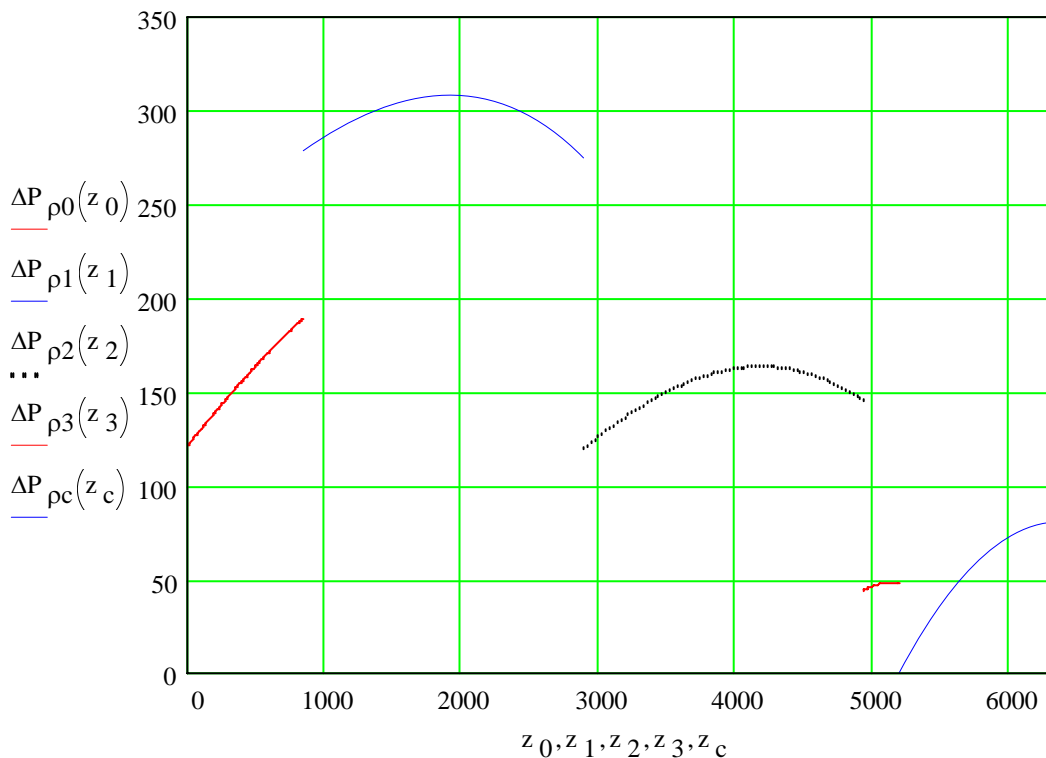
Representación gráfica de la VARIACIÓN de la PRESIÓN respecto a la DENSIDAD en el interior de la TIERRA

de acuerdo con los resultados del modelo: MOD = 1
de propagación de ondas sísmicas P.

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Eje OX: profundidad z en km.

Eje OY: Variación ΔP_ρ en Atmósferas / kg·m⁻³



En cada estrato $i = 0, 1, 2, 3$, la expresión de la variación de la presión con la densidad es:

$$\Delta P_{\rho i}(r) = \frac{d}{d\rho} P_i(r) = \frac{\rho_i(r) \cdot g_i(r) \cdot r}{H \cdot A_i} = \frac{g_i(r) \cdot v_i(r)}{A_i} \quad R_i \geq r \geq R'_i \quad i=0, 1, 2, 3$$

y en el Núcleo Interior:

$$\Delta P_{\rho c}(r) = \frac{d}{d\rho} P_c(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_c \cdot (R_c^2 - r^2) \quad R'_i = R_c \geq r \geq 0$$

Momento de Inercia de la TIERRA

20

de acuerdo con los resultados del modelo: MOD = 1
de propagación de ondas sísmicas P.

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Momento de Inercia en cada estrato

$$I_i := \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot H \cdot \left[R_i^5 \cdot \left(k_i + \frac{A_i}{5} \right) - R'_i{}^5 \cdot \left(k'_i + \frac{A_i}{5} \right) \right] \quad R_i \geq r \geq R'_i \quad i=0, 1, 2, 3$$

$$I_c := \frac{2}{5} \cdot m_c \cdot R_c^2 \quad R'_3 = R_c \geq r \geq 0$$

Momentos de Inercia en: $\text{kg} \cdot \text{km}^2$ con $H = 2.2004 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Manto Superior - E₀ $R_0 \geq r \geq R'_0 = R_1$

$$I_0 := \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot H \cdot \left[R_0^5 \cdot \left(k_0 + \frac{A_0}{5} \right) - R'_0{}^5 \cdot \left(k'_0 + \frac{A_0}{5} \right) \right] \quad I_0 = 3.02178113 \cdot 10^{31} \text{ kg} \cdot \text{km}^2$$

Manto Inferior - E₁ $R_1 \geq r \geq R'_1 = R_2$

$$I_1 := \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot H \cdot \left[R_1^5 \cdot \left(k_1 + \frac{A_1}{5} \right) - R'_1{}^5 \cdot \left(k'_1 + \frac{A_1}{5} \right) \right] \quad I_1 = 4.45444273 \cdot 10^{31} \text{ kg} \cdot \text{km}^2$$

Núcleo Exterior - E₂ $R_2 \geq r \geq R'_2 = R_3$

$$I_2 := \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot H \cdot \left[R_2^5 \cdot \left(k_2 + \frac{A_2}{5} \right) - R'_2{}^5 \cdot \left(k'_2 + \frac{A_2}{5} \right) \right] \quad I_2 = 5.78111697 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{km}^2$$

Zona de Transición - E₃ $R_3 \geq r \geq R'_3 = R_c$

$$I_3 := \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot H \cdot \left[R_3^5 \cdot \left(k_3 + \frac{A_3}{5} \right) - R'_3{}^5 \cdot \left(k'_3 + \frac{A_3}{5} \right) \right] \quad I_3 = 1.10223501 \cdot 10^{29} \text{ kg} \cdot \text{km}^2$$

Núcleo Interior - E_c $R_c \geq r \geq 0$

$$I_c := \frac{2}{5} \cdot m_c \cdot R_c^2 \quad I_c = 7.95524492 \cdot 10^{28} \text{ kg} \cdot \text{km}^2$$

Momento de Inercia Total: $I_t := I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_c$

$$I_t = 8.07331316 \cdot 10^{31} \text{ kg} \cdot \text{km}^2 \quad \text{Momento de Inercia adimensional de la Tierra: } I_{aT} := 0.33076$$

$$I_{\text{Real}} := I_{aT} \cdot M_t \cdot R_0^2 \quad I_{\text{Real}} = 8.02444984 \cdot 10^{31} \text{ kg} \cdot \text{km}^2$$

$$\text{error} := \frac{I_t - I_{\text{Real}}}{I_{\text{Real}}} \quad \text{error} = 0.0060893 \quad \text{Error} = \underline{\underline{0.61 \%}}$$

$$\frac{I_t}{M_t \cdot R_0^2} = 0.33277 \text{ mayor que } I_{aT} = 0.33076$$

Representación gráfica de la PRESIÓN en el interior de la TIERRA

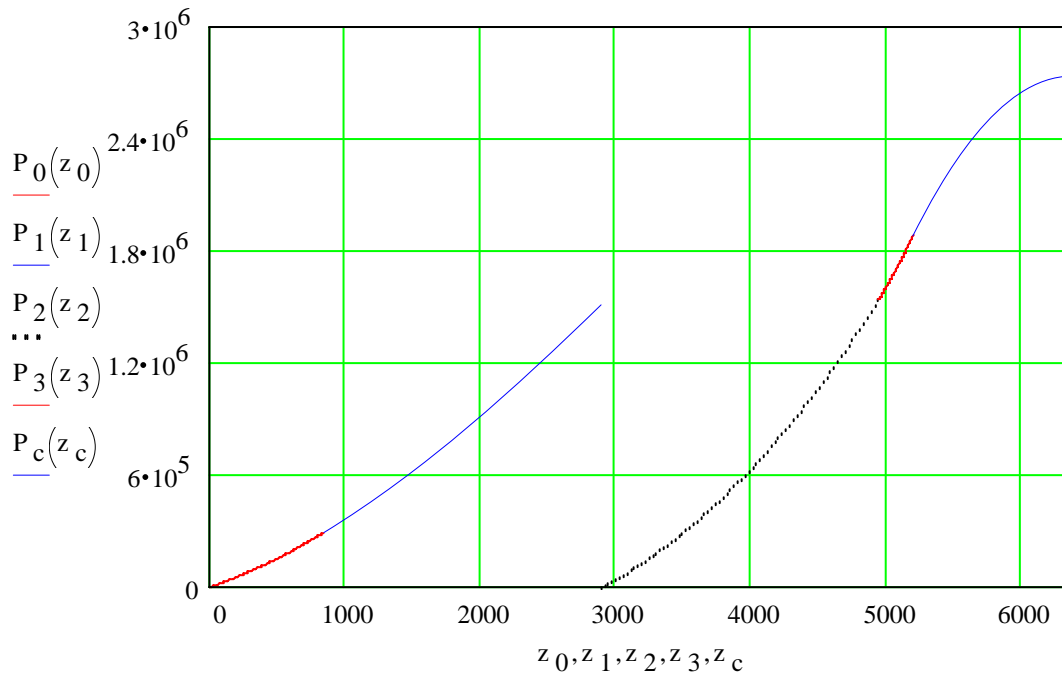
considerando que hay discontinuidad en R_2 ,
 y de acuerdo con los resultados del modelo: MOD = 1
 de propagación de ondas sísmicas P.

en donde la constante H del planeta toma el valor: $H = 2.200422508629 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot \text{seg}$

Consideraremos que la presión en el inicio del estrato E_2 es cero debido a que no hay continuidad en la densidad

Eje OX: profundidad z en km.

Eje OY: Presión P(z) en Atmósferas



Presión $P_i(r)$ en el interior de un estrato E_i :

$$P_i(r) = P_i(R_i) + P_{i1}(r) + P_{i2}(r) - P_{i3}(r)$$

$$P_i(R_i) = \text{Presión en el inicio del estrato}$$

$$P_{i1}(r) = 2 \cdot \pi \cdot G \cdot (\rho_i(R_i)^2 \cdot R_i^2 - \rho_i(r)^2 \cdot r^2)$$

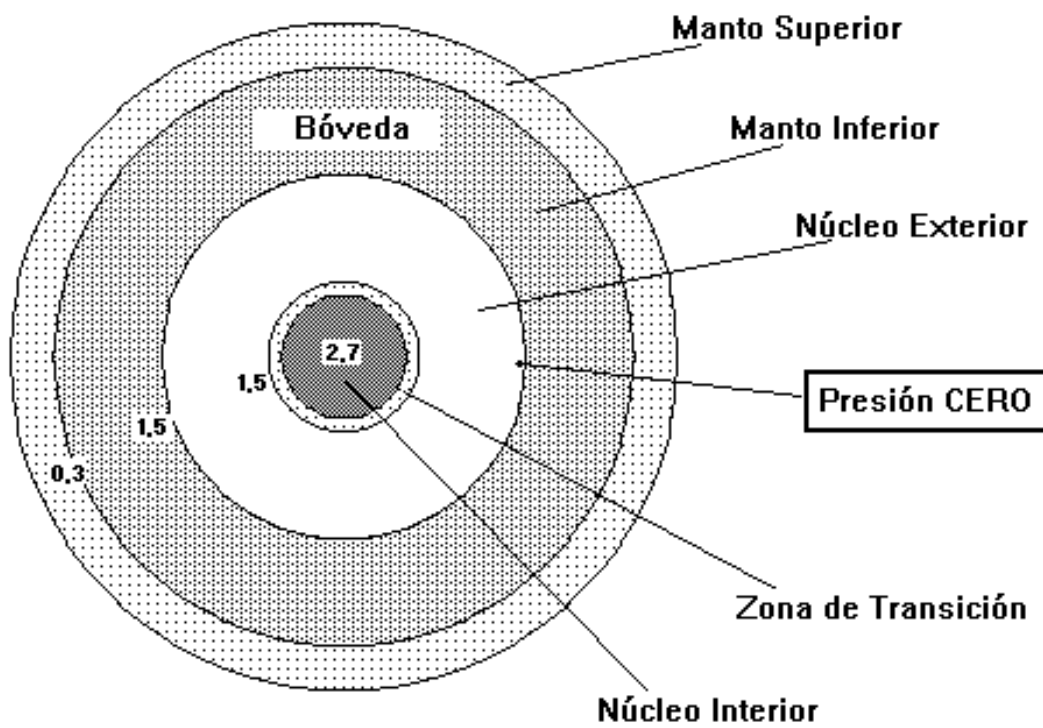
$$P_{i2}(r) = A_i \cdot H \cdot (g_i(R_i) \cdot R_i - g_i(r) \cdot r)$$

$$P_{i3}(r) = \rho_i(R_i) \cdot g_i(R_i) \cdot R_i - \rho_i(r) \cdot g_i(r) \cdot r$$

Continuidad: $P_i(R'_i) = P_j(R_j) \quad j=i+1$ **excepto en R_2 :** $P_1(R'_1) \neq P_2(R_2) = 0$

Presión $P_c(r)$ en el Núcleo Interior - E_c : $P_c(r) = P_c(R_c) + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_c^2 \cdot (R_c^2 - r^2)$

Modelo "BÓVEDA"



LA TIERRA. Presión en millones de Atmósferas

LA TIERRA

Modelo "BÓVEDA"

Modelos	R_c en km	$H \cdot 10^{-15}$ kg·seg·km ⁻³	$I_t \cdot 10^{-31}$ kg·km ²	Error % en I_t	$P(0) \cdot 10^{-6}$ Atm.
1	1175	2,2004	8,073	0,61	2,737
5	1196	2,2015	8,077	0,65	2,695
2	1216	2,2024	8,080	0,70	2,659
3	1230	2,2030	8,083	0,72	2,634
4	1267	2,2048	8,089	0,80	2,568

Modelos	z_c en km	v'_3 km·seg ⁻¹	v_c km·seg ⁻¹	ρ'_3 gr·cm ⁻³	ρ_c gr·cm ⁻³
1	5196	11,7289	11,3231	21,966	21,206
5	5175	11,5784	11,3289	21,305	20,846
2	5155	11,4352	11,3317	20,711	20,524
3	5141	11,3323	11,3323	20,303	20,303
4	5104	11,0421	11,3281	19,222	19,720

Láminas del Poster M-40
XXIV Bienal de la Real Sociedad Española de Física
JACA, España, Septiembre 1993

título:

**"Modelos de propagación de fases P en el interior de la Tierra:
distancias epicentrales, tiempos de propagación y velocidades"**

autores:

Yoël Lana-Renault
Fco. Javier Sabadell Melado
Rafael Cid Palacios
J. Ignacio Badal

Departamento de Física Teórica-Geofísica
Universidad de Zaragoza